Перемётнинская СОШ

Решение логарифмических уравнений и систем логарифмических уравнений.

 (учебное пособие)

Перемётное - 2019

ВВЕДЕНИЕ

Изучение логарифмической функции, способов решения уравнений и неравенств данного раздела занимает немаловажное место в изучении всего курса алгебры и начал анализа 11 класса, и это актуально, прежде всего потому, что данный материал широко используется в тестовых заданиях при сдаче ЕНТ и экзаменационных программах для поступающих в ВУЗы и другие учебные заведения.

Настоящая учебное пособие содержит систематическое изложение методов решения логарифмических уравнений  с одной переменной и систем логарифмических уравнений. Прежде всего оно предназначено учащимся 11 класса для самостоятельного изучения. Краткие теоретические сведения и решения задач позволяют учащимся самостоятельно развивать умения и навыки решения логарифмических уравнений. В пособии подробно рассмотрены решения некоторых примеров и даны указания и ответы к заданиям для самостоятельного рассмотрения.

Данная работа может быть использована и преподавателями, прежде всего в дидактическом смысле: подбор упражнений позволяет составить для учащихся индивидуальные задания  с учетом их возможностей. Данные упражнения могут быть использованы для урока обобщения и для подготовки к ЕНТ и итоговой аттестации.

**ГЛАВА 1. Методы решения логарифмических уравнений.**

**Логарифмическим уравнением** называется уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком логарифма ( в частности, в основании логарифма).

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида  ***b*,**

где *a* и *b* – числа, а *х* – переменная величина.

Причём, если *a*>0, *a* ≠1, то уравнение имеет единственный корень ***х = a b.***

Решение более сложных логарифмических уравнений, как правило, сводится либо к решению алгебраических уравнений, либо к решению к выше приведённого уравнения.

Математической записью **определения логарифма** является так называемое основное логарифмическое тождество:

**Помните! Всякое положительное число при любом (положительном и отличном от единицы) основании имеет логарифм, а отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.**

 **При решении логарифмических уравнений необходимо знание свойств логарифма.** Перечислим эти свойства:

(*a>0, a* b>0, c>0, c

Следующая группа свойств позволяет представить  показатель степени выражения, стоящего под знаком логарифма, или стоящего в основании логарифма в виде коэффициента  перед знаком логарифма:

Следующая группа формул позволяет перейти от логарифма с данным основанием к логарифму с произвольным основанием, и называется **формулами перехода к новому основанию**:

1. (следствие из свойства 10)

Следующие два свойства не очень известны, однако они часто используются при решении логарифмических уравнений:

 **Решение любого логарифмического уравнения** предполагает переход от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифмов. Однако это действие расширяет область допустимых значений уравнения и может привести к появлению посторонних корней.

 Зная, что областью определения логарифмической функции является множество положительных действительных чисел, следует при решении уравнений обязательно находить ОДЗ, либо выполнять проверку найденных корней.

**Внимание! Мы всегда ищем ОДЗ исходного уравнения, а не того, которое получится в процессе преобразований. То есть ОДЗ записываем перед тем, как переходим к решению уравнения.**

Логарифмическое уравнение любого уровня сложности в конечном итоге всегда сводится к простейшему логарифмическому уравнению.

Рассмотрим основные методы решения логарифмических уравнений на примерах.

1. Метод использования определения логарифма.
* **Пример 1. Решите уравнение:**

Решение:

1. ОДЗ: при любом х (так как D<0 и *a*>0, график квадратичной функции не пересекает ось абсцисс).
2. Воспользуемся определением логарифма: **Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a* (*a* > 0, *a* ≠ 1) называется степень, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить** ***b*.** Таким образом,

, *ax = b.* Применяя для нашего уравнения имеем:

, = .

1. Решим приведённое квадратное уравнение, используя теорему Виета: х1 = 2, х2 = 9.

**Ответ: 2; 9**

* **Пример 2. Вычислите сумму полученных корней: log2(x2 – 4x + 1) = 3**

Решение:

1. Воспользуемся определением логарифма и применим его для нашего уравнения:

 log2(x2 – 4x + 1) = 3, 23 = x2 – 4x + 1.

1. Решим квадратное уравнение, используя формулу корней:

x2 – 4x + 1 – 8 = 0, x2 – 4x – 7 = 0, D = 44, ,

х1 = , х2 = .

1. Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению: log2((2 – 4 ) + 1) = 3

 log2(4 + 11 – 8 4 + 1) = 3

 log28 = 3, 23 = 8.

1. Найдём сумму корней: х1 + х2= + = 4

**Ответ: 4.**

1. Метод потенцирования.

Метод потенцирования заключается в переходе от уравнения

**log*a*f(x)= log*a*g(x)** к уравнению **f(x)=g(x)**, при условии, что f(x)>0, g(x)>0.

* **Пример 3. Решите уравнение: (10 - x) + (x - 3) = - 1**

Решение:

1. ОДЗ: получаем: х(3;10).
2. Воспользуемся свойством 3 в левой части уравнения, а в правой –

представим - 1 в виде логарифма с основанием :

(10 - x)( x - 3) =

Приравняем выражения, стоящие под знаком логарифма:

(10 – х)(х – 3) = 6, раскрыв скобки, получим квадратное уравнение:

 х2 – 13х + 36 = 0, по теореме Виета находим корни: х1=4, х2=9

1. Проверим, удовлетворяют ли наши корни ОДЗ уравнения: 4(3;10), 9(3;10).

**Ответ: 4; 9**

* **Пример 4. Решите уравнение:**

Решение:

1. ОДЗ: получаем: х
2. **Внимание! Для упрощения вычислений перенесите логарифмы с отрицательными коэффициентами в противоположную часть уравнения – из соображений, что умножать проще, чем делить.**

Воспользуемся свойством 3, предварительно представив число 0,5 в виде логарифма с основанием 2:

Приравняем выражения, стоящие под знаком логарифма:

, возведём в квадрат обе части уравнения и перенесём всё в одну сторону: , вынесем за скобку общий множитель (2 – х):

Упростим выражение во второй скобке и приравняем каждый множитель к нулю:

(2 – х)(

2 – х = 0, х = 2 (не удовлетворяет ОДЗ уравнения)

 , (возведём в квадрат обе части уравнения)

16х = 9х2,

х (9х – 16) = 0,

х = 0, х = (оба корня удовлетворяют ОДЗ уравнения).

**Ответ: 0;**

1. Метод введения новой переменной.

Уравнения, которые содержат логарифмы **в степени, отличной от 1**, решаются с помощью **введения новой переменной**. Обычно замену (подстановку) производят после некоторых преобразований исходного уравнения.

* **Пример 5. Решите уравнение: =**

Решение:

1. ОДЗ: lg x
2. **Введём замену:** **lg x = у**, y

 , умножим обе части уравнения на выражение (1 – у2):

3у + 2 = 1 + у, 2у = - 1, у = -

1. Вернемся к исходной переменной: lg x = - , х =
2. Проверим, удовлетворяет ли наш корень ОДЗ уравнения:

**Ответ:**

* **Пример 6. Решите уравнение:**

Решение:

1. ОДЗ: х
2. **Важно! Прежде чем вводить замену, нужно «растащить» логарифмы, входящие в состав уравнения на «кирпичики», используя свойства логарифмов.**

При «растаскивании» логарифмов важно очень аккуратно применять свойства 3 и 4. Кроме того, чтобы избежать распространенной ошибки, воспользуемся промежуточным равенством – запишем степень логарифма в таком виде:

lg 2 (100x) = (lg (100x) 2 = (lg100 + lgx)2 = (2 + lgx)2

Аналогично,

lg 2 (10x) = (lg (10x) 2 = (lg10 + lgx)2 = (1 + lgx)2

lg = lg x – 1  = - lg x

Подставим полученные выражения в исходное уравнение. Получим:

(2 + lgx)2 + (1 + lgx)2 = 14 - lg x

1. **Введем замену**: **lgx = y**. Так как **lg x** может принимать любое действительное значение, на переменную **y** мы никаких ограничений не накладываем.

Получили уравнение:

(2 + y)2  + (1 + y)2 = 14 - y

Раскроем скобки, приведем подобные члены и решим квадратное уравнение:

2y2 + 7y – 9 = 0

y1 = 1, y2 = - 4,5

1. Вернемся к исходной переменной:

lg x = 1,   x =10

lg x = - 4,5, x = 10 – 4,5

1. Оба корня удовлетворяют ОДЗ уравнения.

**Ответ:** **10 – 4,5,  10**

1. Метод приведения к одному основанию.

Обычно условие задания подсказывает, к какому основанию следует перейти. При этом используются формулы перехода к новому основанию (9, 10, 11).

Как правило, метод приведения к одному основанию "работает" с методом введения новой переменной.

* **Пример 7. Решите уравнение: log16x + log2x + log4x = 7**

Решение:

1. ОДЗ: х
2. Воспользуемся свойством 6 и приведём логарифмы в левой части к основанию 2:

Приведём подобные и найдём корень уравнения:

х = 16 – принадлежит ОДЗ уравнения.

**Ответ: 16**

* **Пример 8. Решите уравнение:**

Решение:

1. **Внимание! Если уравнение содержит неизвестное в основании логарифма то вводится дополнительное ограничение:**

***a*(х)**

ОДЗ:

1. Воспользуемся свойствами 1,5 и 9 и перейдём в левой части уравнения к основанию 3:
2. **Введём замену:**

, по теореме Виета находим корни:

у1 = 1, у2 = 2

1. Вернёмся к исходной переменной:

 >0

 >0

**Ответ: 3; 9**

* **Пример 9. Решите уравнение:**

Решение:

1. ОДЗ:
2. Воспользуемся свойством 10 и приведём логарифмы к основанию 2:

Воспользуемся свойствами 3 и 4 и упростим левую и правую части уравнения:

1. **Введём замену:** и решим квадратное уравнение:

у2 – 5у + 6 = 0

у1 = 2, у2 = 3

1. Вернёмся к исходной переменной:

 >0

 >0

**Ответ: 4; 8**

1. Метод логарифмирования.

При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

* **Пример 10. Решите уравнение: xlog3x = 9x**

Решение:

1. ОДЗ:
2. В ОДЗ обе части уравнения положительны, поэтому, логарифмируя обе части уравнения по основанию 3, получим равносильное уравнение:

Применим свойства 3 и 5:

log23x = log39 + log3x

log23x – log3x – 2 = 0

1. **Введём замену:** и решим квадратное уравнение:

у2 – у – 2= 0

у1 = - 1, у2 = 2

1. Вернёмся к исходной переменной:

1. Оба корня удовлетворяют ОДЗ уравнения.

**Ответ: 9**

* **Пример 11. Запишите сумму корней уравнения: (0,1x)lgx =1000x**

Решение:

1. ОДЗ:
2. В ОДЗ обе части уравнения положительны, поэтому, логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим равносильное уравнение:

Применим свойства 3 и 5:

lg2x – lg x = 3 + lg x

lg2x –2 lg x – 3 = 0

1. **Введём замену:** и решим квадратное уравнение:

у2 – 2у – 3= 0

у1 = - 1, у2 = 3

1. Вернёмся к исходной переменной:

1. Оба корня удовлетворяют ОДЗ уравнения.
2. Найдём сумму корней уравнения: 1000 + 0,1= 1000,1

**Ответ: 1000,1**

**Глава 2. Методы решения систем логарифмических уравнений.**

Для решения систем логарифмических уравнений используются приёмы решения систем алгебраических уравнений, свойства логарифма и методы решения логарифмических уравнений.

1. Метод потенцирования.
* **Пример 1.** **Решить систему уравнений**
Решение:
1. Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду, применяя свойства 1 и 3:
2. Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду, применяя свойство 5:
3. Решим полученную систему уравнений:

Подставив **2у** вместо **х** во второе уравнение, получим:

Подставив полученные значения в первое уравнение, находим:

**х1 = - 2, х2 = 4**

1. Выполним проверку найденных пар(4; 2) и (-2; -1) с помощью условий, которые мы определяем, анализируя исходную систему уравнений:

Пара (4; 2) удовлетворяет этим условиям, а пара (-2; -1) не удовлетворяет (например, она «не проходит» уже через первое условие 2х -у> 0).

**Ответ:** **(4; 2).**

1. Метод ведения новых переменных.
* **Пример 2.** **Решить систему уравнений:**

Решение:

1. ОДЗ:
2. В первом уравнении применим свойство 10 для перехода к основанию ***у*** и выполним замену

Решив квадратное уравнение получаем:

1. Найдём решения исходной системы в соответствии с полученными корнями:

1) - принадлежит ОДЗ

2) - принадлежит ОДЗ.

**Ответ: ,**

**Системы показательных и логарифмических уравнений.**

Системы, содержащие показательные и логарифмические уравнения, обычно решаются сведением показательного (или логарифмического) уравнения к алгебраическому уравнению с последующим решением полученной алгебраической системы.

* **Пример 3.** **Решить систему уравнений:**

Решение:

1. Множество допустимых значений неизвестных **х** и **у** определяется системой неравенств:
2. Преобразуем показательное уравнение, используя свойства степени, перейдём к основанию в обеих частях уравнения:
3. Преобразуем логарифмическое уравнение, применив свойство 3 определение логарифма:
4. Таким образом решение исходной системы свелось к решению системы уравнений, рассматриваемой на множестве допустимых значений неизвестных, задаваемой системой неравенств из пункта 1:

Из первого уравнения системы находим:

1. Выполним проверку полученных пар чисел. Пара (3; - 3) удовлетворяет системе неравенств, пара (-3; 3) – не удовлетворяет.

**Ответ: (3; - 3)**

**Задания для самостоятельного решения.**

1. Решите уравнение:

А) 6

В) 4

С) 0

D) 1

E) 2

1. Решите уравнение: 2
2. 3
3. 7
4. 5
5. 6
6. 4
7. Найдите х02, где х0 – корень уравнения:

А)

B) 16

C) 4

D) 2

E)

1. Решите уравнение:
2. -
3. 8
4. 12
5. - 8
6. Решите уравнение:
7. 4
8. 16
9. 19
10. 8
11. 12
12. Решите уравнение:
13. 25
14. 1
15. ; 1
16. Решите уравнение:
17. 8
18. 6
19. Решите систему уравнений:
20. (125; 5)
21. (5; 125)
22. (5; )
23. (5;
24. (
25. Решите систему уравнений:
26. (1; 4)
27. (1; 3)
28. (2; 6)
29. (-3; 1)
30. (3; 1)
31. Какие из корней уравнения являются так же корнями уравнения 0,2x3 – 5x = 0?
32. 5
33. -5; 0; 5
34. -5
35. 5; 0
36. -5; 0
37. Решите уравнение:
38. 5; 8
39. 4; 3
40. 2; 1
41. 6; 14
42. 1; 6
43. Решите уравнение:
44. 5
45. 1,25
46. 0,5
47. 1,5
48. 2
49. Решите уравнение:
50. -1; 5
51. 2; -3
52. -2; 3
53. 2
54. 1; -5
55. Решите уравнение:
56. 16,5
57. 6,5
58. 9,5
59. 0,5
60. 12,5
61. Найдите х12 + х22, где х1 и х2 – корни уравнения:
62. 20
63. 15
64. 9
65. 17
66. 3
67. Решите систему уравнений:
68. (0; 10)
69. (0; 100)
70. нет решения
71. (100; 10)
72. (10; 100)
73. Сколько корней имеет уравнение ?
74. Четыре
75. Один
76. Два
77. Три
78. Ни одного
79. Решите уравнение:
80. 1
81. Нет решений
82. 5
83. 2
84. 4
85. Решите уравнение:
86. -2
87. -4
88. Нет решений
89. 4
90. 2
91. Решите систему уравнений:
92. Нет решения
93. (8; )
94. (2; 1)
95. (4; )
96. (1;2)
97. Решите уравнение: log22x – log0,5
98. -0,25; 8
99. 0,25; 8
100. -6; 1
101. 2; - 3
102. -2; 3
103. Решите уравнение:
104. 9
105. 1
106. 3,5
107. 6
108. 2
109. Решите уравнение:
110. – 3; 29
111. 29
112. 3; -29
113. 3
114. Решите уравнение:
115. 3
116. – 4
117.
118. Найдите произведение корней уравнения
119. 0,001
120. 0,1
121. 0,0001
122. 0,01
123. 1
124. Решите уравнение:
125. 3; 10
126. 6; 20
127. 6
128. 3
129. 10
130. Решить систему уравнений:
131. (10;5)
132. (10; - 15)
133. (0; - 5)
134. (5;0)
135. (-10;15)
136. Решите уравнение: = -
137. 5
138.
139. -
140. 2
141. 1
142. Решите уравнение:
143. 10; 106
144. 100; 108
145. 1; 103
146. 1; 102
147. 1; 10
148. Решите уравнение:
149. 1
150. 2
151. 0,5; 4
152. 4
153. 2; 4
154. Решите уравнение: log20,5*x* - 3
155. 16;
156. Нет решений
157. 16
158. ; 2
159. Найдите , где х – корень уравнения
160.
161. Решите уравнение:
162. 9
163.
164. 3
165. Решите уравнение:
166. 11; 25
167. 2; 11
168. 6; 11
169. 2; 6
170. 6
171. Решите систему уравнений: Найдите сумму корней
172. 15
173. 5
174. 8
175. 11
176. 10
177. Решите уравнение:
178. 1; 2
179. Нет корней
180. 2
181. 3
182. 1
183. Решите уравнение: lg2(-x) +
184. – 10
185. Нет решения
186. - 1; -
187. –
188. - - 1
189. Решите уравнение: -
190.
191. Найдите произведение корней уравнения 6 log32x – 12 log3x = 0
192. – 6
193. 18
194. 0
195. 6
196. 9
197. Решить систему уравнений:
198. Нет решения
199. (106;10-1)
200. (10; 100)
201. (10-2; 104)
202. (10;10)
203. Решите уравнение: 2 –
204. 2
205. – 1
206. – 1
207. – 1
208. 1
209. Решите уравнение: 3
210. 1; 9
211. 1
212. 9
213. Нет корней
214. 1;
215. Решите уравнение:
216. 5
217. 6
218. 3
219. 8
220. 9
221. Решите уравнение: (
222. -5; 4
223. 10
224. -4; 5
225. 4
226. 5
227. Решите систему уравнений:
228. (16;2)
229. (2;16)
230. (0;8)
231. (8;16)
232. (16;0)

**Ответы:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | E | 10. | A | 19. | C | 28. | B | 37. | D |
| 2. | E | 11. | D | 20. | B | 29. | B | 38. | A |
| 3. | B | 12. | B | 21. | B | 30. | D | 39. | E |
| 4. | B | 13. | D | 22. | E | 31. | D | 40. | B |
| 5. | B | 14. | D | 23. | B | 32. | B | 41. | D |
| 6. | B | 15. | D | 24. | E | 33. | D | 42. | А |
| 7. | B | 16. | D | 25. | A | 34. | B | 43. | С |
| 8. | C | 17. | E | 26. | E | 35. | A | 44. | Е |
| 9. | E | 18. | D | 27. | A | 36. | C | 45. | А |

**Указания к решению:**

1. В правой части логарифм равен нулю по свойству 2, затем применять последовательно определение логарифма, начиная с первого логарифма.
2. Применить свойство 5, затем определение логарифма.
3. Применить свойства 5, 6, 9 для перехода к основанию 2 в левой части и к основанию 3 – в правой части; выполнить замену .
4. Последовательно применить определение логарифма
5. Выполнить переход к основанию 2 по свойству 9, затем – замену .
6. Применить свойство 10, затем выполнить замену .
7. Применить определение логарифма.
8. Применить определение логарифма.
9. В первом уравнении применить определение логарифма, выразить **х** через **у**, затем выполнить подстановку во втором уравнении.
10. Применить свойство 3, затем определение логарифма. Не забудьте выполнить проверку корней! Второе уравнение решается разложением на множители.
11. Перенесите выражения со знаком «минус» в противоположную сторону, число 2 представьте в виде десятичного логарифма и примените свойства 5 и 3.
12. Умножить обе части уравнения на , применить свойство 5.
13. Применить свойство 3.
14. Применить свойство 5 и 3.
15. Применить определение логарифма.
16. Выполнить замену , решить методом сложения.
17. Применить метод потенцирования. Не забудьте выполнить проверку найденных корней!
18. Перенести логарифм со знаком «минус» в противоположную сторону, число 1 представить в виде логарифма с основанием 5; ввести замену .
19. Применить метод потенцирования.
20. Применить свойства 5 и 3, решить полученную алгебраическую систему методом подстановки.
21. Применить свойства 6 и 4, выполнить замену
22. В правой части применить свойства 5 и 6, основное логарифмическое тождество.
23. Применить свойство 4, решить дробно-рациональное уравнение.
24. В правой части перейти к основанию 2 по свойству 6, применить метод потенцирования и выполнить замену
25. Выполнить замену
26. В правой части выполнить переход к логарифму с основанием 10 по свойству 10, применить свойство 5.
27. В первом уравнении выразить **х** через **у**, во втором уравнении применить свойство 4.
28. Зная, что , применить свойство 3; возвести обе части в квадрат, выполнить замену .
29. Выполнить замену
30. В левой части перейти к основанию 2 (по свойству 10), применить метод потенцирования.
31. Применить определение логарифма, выполнить замену
32. Выполнить переход к логарифму по основанию по свойству 9.
33. В левой части выполнить переход к логарифму с основанием 3 ( по свойству 9), а в правой части, используя свойства 5 и 6 – к логарифму с основанием 2.
34. Решить систему (по определению модуля).
35. В первом уравнении применить свойство 4, во втором – воспользоваться основным логарифмическим тождеством.
36. Применить определение логарифма. Помните, х1!
37. Применить свойство 5, выполнить замену
38. Перенести вправо, применить свойства 3 и 4.
39. Выполнить замену
40. Выполнить замену , решить методом сложения.
41. Перенесите выражения со знаком «минус» в противоположную сторону, число 2 представьте в виде логарифма с основанием 2 и примените свойство 3.
42. Выполнить переход к логарифму с основанием 3 в обеих частях уравнения, применить свойство 3; выполнить замену
43. Перенесите выражения со знаком «минус» в противоположную сторону, число 4 представьте в виде логарифма с основанием 2 и примените свойство 3.
44. Зная, что 0,1 = 10 – 1, выполнить переход к десятичному логарифму (по свойству 9), раскрыть скобки.
45. Во втором уравнении применить свойство 4 и определение логарифма; решить полученную систему методом подстановки.

Литература для учителя:

1. Сканави М. И. Сборник задач для поступающих во ВТУЗЫ – М.: «Высшая школа», 1987.
2. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике. – М.: Наука, 1989.
3. Антонов Н.П. Сборник задач по элементарной математике – М.: Наука, 1982.
4. Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т.– Пособие для подготовки к ЕНТ по математике. – Алматы, 2007.
5. Шарыгин Л.Ф. «Факультативный курс по математике. Решение задач». – М.: Просвещение, 1991.
6. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Айрис-пресс, 2003.
7. Математика: Сборники тестов: Учебно-методическое пособие. – Астана: НЦГСОиТ, 2002-2016гг.

Литература для учащихся:

1. Абылкасымова А., Корчевский В., Абдиев А, Жумагулова З., Алгебра и начала анализа. Учебник для11 класса. (естественно-математическое направление общеобразовательных школ). – Алматы «Мектеп», 2015.
2. Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т.– Пособие для подготовки к ЕНТ по математике. – Алматы, 2007.
3. Бексултанова К.Н., Черенко К.И. Абитуриенту-2005: Тестовые задания, формулы, решения, ответы по математике для поступающих в вузы. – «Келешек – 2030», 2005
4. Математика: Сборники тестов: Учебно-методическое пособие. – Астана: НЦГСОиТ, 2002-2016гг.
5. Егоркина Н. Математика для поступающих в вузы. Тестовые задания, решения, ответы. Часть 1. Изд. 2-е, испр. – Кокшетау: «Келешек – 2030», 2015.

 Интернет-ресурсы

1. http//www.bymath.net
2. http//www.testent.ru
3. <http://megamozg.kz>
4. <https://100ballov.kz>
5. https://testcenter.k

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2
2. Глава 1\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_3
3. Глава 2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_14
4. Задания для самостоятельного решения\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_18
5. Ответы и указания к решениям\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_27
6. Литература для учителя и учащихся\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_31